Spring June 2, 2020

جلس ـهـ د ـهـ م.pdf

Ismail Nikoufar

به نام خدا
جلسه روز سه شنبه
مورخ ۹۹/۰۳/۱۳

حل نمونه سوالات دیفرانسیل دوم ۹۸-۹۷

(۱) سری جواب معادله دیفرانسیل زیر در $x_0=0$:

$$(1+4x^2)y''-8y=0$$

حل: $x_0=0$ نقطه معمولی ولذا سری جواب

آن به شکل $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

$$-8y=\sum_{n=0}^{\infty}-8a_nx^n \quad (1)$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$4x^2y''=\sum_{n=2}^{\infty}4n(n-1)a_nx^n \quad (2)$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} \quad (3)$$

و

$$0 = y'' + 4x^2 y'' - 8y$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1)a_n x^n$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} 8a_n x^n = 0$$

$$0 = \left[2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + 30a_6 x^4 + \dots\right]$$

$$+ \left[8a_2 x^2 + 24a_3 x^3 + 48a_4 x^4 + \dots\right]$$

$$+ \left[-8a_0 - 8a_1 x - 8a_2 x^2 - 8a_3 x^3 - 8a_4 x^4 + \dots\right]$$

$$\cdot = (2a_2 - 8a_0) + (6a_3 - 8a_1)x + 12a_4x^2 + (20a_5 + 16a_3)x^3 + (30a_6 + 40a_4)x^4 + \cdots$$

$$\begin{cases} 2a_2 - 8a_0 = 0 \Longrightarrow a_2 = 4a_0 \\ 6a_3 - 8a_1 = 0 \Longrightarrow a_3 = \dfrac{4}{3}a_1 \\ 12a_4 = 0 \Longrightarrow a_4 = 0 \\ 20a_5 + 16a_3 = 0 \Longrightarrow a_5 = -\dfrac{4}{5}a_3 = -\dfrac{16}{15}a_1 \\ 30a_6 + 40a_4 = 0 \Longrightarrow a_6 = 0 \end{cases}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

$$+ a_5 x^5 + a_6 x^6 + \cdots$$

$$y = a_0 + a_1 x + 4a_0 x^2 + \frac{4}{3} a_1 x^3 - \frac{16}{15} a_1 x^5$$

$$+ 0 + \cdots$$

$$= a_0 \big(\underbrace{1 + 4x^2 + \cdots}_{y_1} \big) + a_1 \big(\underbrace{x + \frac{4}{3} x^3 - \frac{16}{15} x^5 + \cdots}_{y_2} \big)$$

(2) معادله دیفرانسیل برنولی زیر را حل کنید:

$$xy' + y = x^4 y^3.$$

حل:

$$\frac{d}{dx}(xy) = x^4 y^3$$

$$\Rightarrow d(xy) = x^4 y^3 \, dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} xy = \int x^4 y^3 \, dx$$

$$\Rightarrow xy = \frac{1}{5} x^5 y^3 + c \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{5} x^4 y^3 + \frac{c}{x}} \checkmark$$

(3) معادله غیرهمگن $y''+y=\sec^3 x$ را به روش تغییر پارامتر حل کنید.

$$\boxed{y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2}$$

$$y''+y=0 \Longrightarrow D^2+1=0 \Longrightarrow D=\pm i$$

$$y_c=c_1\underbrace{\cos x}_{y_1}+c_2\underbrace{\sin x}_{y_2}$$

$$\begin{cases} y_1c_1'+y_2c_2'=0 \\ y_1'c_1'+y_2'c_2'=\sec^3 x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1'\cos x+c_2'\sin x=0 \\ -c_1'\sin x+c_2'\cos x=\sec^3 x \end{cases}$$

معادله بالا را در $\cos x$ و پائین را در $\sin x$ ضرب و سپس جمع کنیم

$$\begin{cases} c_1' \cos x \sin x + c_2' \sin^2 x = 0 \\ -c_1' \sin x \cos x + c_2' \cos^2 x = \cos x \times \dfrac{1}{\cos^3 x}. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad c_2'(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Longrightarrow \quad c_2' = \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow \boxed{c_2 = \tan x}$$

$$c_1' \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin x = 0 \Longrightarrow c_1' = -\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$c_1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x + \tan x \cdot \sin x$$

$$= \sec x + \sin^2 x \cdot \sec x$$

$$= \sec x \left(1 + \sin^2 x\right).$$

(4) —

(5) با استفاده از کنولوسیون معادله انتگرالی زیر را حل کنید.

$$y(x) = x^3 + \int_0^x \sin(x-u)\, y(u)\, du$$

حل: با تبدیل لاپلاس داریم:

$$L(y) = L(x^3) + L\left(\int_0^x \sin(x-u)\, y(u)\, du\right)$$

$$Y(s) = \frac{3!}{s^4} + L(\sin x) \cdot L(y)$$

$$Y(s) = \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s^2+1} \cdot Y(s).$$

$$Y(s)\left(1-\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{6}{s^4}$$

$$Y(s)=\frac{6}{s^4}\cdot\frac{s^2+1}{s^2}=6\left(\frac{1}{s^4}+\frac{1}{s^6}\right)$$

$$=6\left(\frac{3!}{3!\,s^4}+\frac{5!}{5!\,s^6}\right)$$

$$\boxed{y(x)=x^3+\frac{6}{5!}x^5}$$